数理解析研究所講究録
635巻 1987年 51-58

Constrained system の versal unfolding について

京大・理　岡　宏枝(Hiroe Oka)

京大・理　国府寛司(Hiroshi Kokubu)

1.　我々は、(ε, α)-parameter 付きの常微分方程式系、

$$
(1)\quad \begin{cases}
\varepsilon \dot{x}_1 = f_1(x_1,\ldots,x_r,\ y_1,\ldots,y_{n-r},\alpha) \\
\quad\vdots \\
\varepsilon \dot{x}_r = f_r(x_1,\ldots,x_r,\ y_1,\ldots,y_{n-r},\alpha) \\
\dot{y}_1 = g_1(x_1,\ldots,x_r,\ y_1,\ldots,y_{n-r},\alpha) \\
\quad\vdots \\
\dot{y}_{n-r} = g_{n-r}(x_1,\ldots,x_r,\ y_1,\ldots,y_{n-r},\alpha)
\end{cases}
$$

の標準形とその versal unfolding を考察するために、(1)を多様体 M の上に次のように定式化した。

<u>定義1.</u>　Mをn次元C^∞多様体、vをM上のベクトル場、AをTMの bundle endomorphism とする。組(A; v)を <u>generalized vector field</u> といい、その全体をGX(M)とかく。また、各$x \in M$に対して、A(x)の corank が一定値rであるとき、組(A; v)を <u>constrained system of corank r</u>といい、そ

の全体をCX_rとかく。

<u>定義２.</u>　$P: TM \to TM$ bundle automorphism と　$\phi: M \to M$ diffeomorphism の組（$P; \phi$）を constrained system の<u>変換</u>と言う。（$P; \phi$）は（$A; v$）$\in CX_r$（または、GX）に次のように作用する。

$$(A'; v') = (P \circ T\phi \circ A \circ T\phi^{-1}; P \circ T\phi \circ v \circ \phi^{-1})$$

また、このとき（$A; v$）と（$A'; v'$）は、<u>同値</u>(equivalent)であるという。

Constrained system の<u>ｋ次の normal form</u> とは、constrained system のｋ－jetの上で定義した同値関係で割った代表元のことである。以前の研究集会において、無限小変形を用いてこれを計算するアルゴリズムと、２次元、３次元の constrained system の余次元の低い場合の計算結果について報告した。（［１］［２］［３］［４］参照。）

一言で言えば、versal unfolding とは、（$A; v$）の unfolding のうちで、適当に変換することによって、（$A; v$）の任意の unfolding がえられる様なものである。従って、それを特徴づけることは、ある中心となる系（（１）で、$\varepsilon=0$、$\alpha=0$としたもの）を与えたときに、その摂動系のうちでどのようなものが安定であるか、また、どのような dynamics がその摂動系に現れうるかを知るのに有効である。ここでは、以上の定式化のもとで corank 1 の constrained system の versal unfolding について議論する。

2．　以下、$(A; v)^k$を $x_0 \in M$ のまわりの constrained system（または、generalized vector field）$(A; v)$のk－jetとする。ここでは、一般的な場合である corank 1 の constrained system $(A_0; v_0) \in CX_1$の unfolding $(A_\mu; v_\mu)$，$\mu \in R^m$ について考えるが、その場合十分小さなμについては、$(A_\mu; v_\mu) \in CX_0 \cup CX_1$ である。

$C = CX_0 \cup CX_1$、　$C^k = \{CX_0$のk-jets$\} \cup \{CX_1$のk-jets$\}$とおく。特に、$(A; v)$の unfolding の中で次のようなものを考えることにする。

<u>定義3.</u>　$\mu \in R^m$ をパラメーターとする constrained sysytem の family $(A\ ;v\ )^k$ が $(A; v)^k \in C^k$ の <u>regular unfolding</u> であるとは、$(A_0; v_0)^k = (A; v)^k$ であり、更に、

［U］　$U \subset M \times R^m$ の近傍と、その上で定義された$(A_\mu; v_\mu)^k$ の代表元 $(A_\mu; v_\mu)$ で A_μ がU上で constant corank になるものが存在し、かつ、

［R］　$$\left.\frac{d}{d\mu}\right|_{\mu=0} \det A_\mu(x_0) \neq 0$$

が成立することである。

我々は、$(A; v)^k$ の regular unfolding であって、適当な変換の family を作用させることにより任意の $(A; v)^k$ の regular unfolding がそれから得られるようなものを versal unfolding と呼ぶことにする。

<u>定義４．</u>　$(A'_\lambda; v'_\lambda)^k$、$(A_\mu; v_\mu)^k$ を $(A; v)^k$ の regular unfolding とする。このとき、$(A'_\lambda; v'_\lambda)^k$ が $(A_\mu; v_\mu)^k$ から <u>induce</u> された regular unfolding であるとは、変換 $(Id; id)^k$ の unfolding $(P_\lambda; \phi_\lambda)^k$と parameter の変換 $\mu = h(\lambda)$ が存在し、

$$(A'_\lambda; v'_\lambda)^k = (P_\lambda; \phi_\lambda)^k \# (A_{h(\lambda)}; v_{h(\lambda)})^k$$

が成立することである。

<u>定義５．</u>　任意の $(A; v)^k$ の regular unfolding $(A'_\lambda; v'_\lambda)^k$ が $(A_\mu; v_\mu)^k$ から induce されるとき、$(A_\mu; v_\mu)^k$ を $(A; v)^k \in C^k$ の <u>k-versal unfolding</u> と言う。特に、$h = id$ の時、$(A'_\lambda; v'_\lambda)^k$ と $(A_\mu; v_\mu)^k$ は、<u>equivalent</u> であると言う。

次の補題が成立する。

<u>補題６．</u>　regular unfolding $(A_\mu; v_\mu)^k$ は、

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \\ & & ; * \\ 0 & I_{n-1} & \end{pmatrix}^k$$

の形の unfolding と equivalent である。但し、$a = a(\mu)$, i.e. μ のみに依存する定数である。

3.　次に我々は、versal unfolding を特徴づけるために、constant determinant unfolding のクラスを導入する。

$D = \{ (A;v) \in GX \mid \det A = \mathrm{const} \}$

$D^k = \{ (A;v)^k \mid (A;v) \in D \}$

$D^k = \{ (A;v)^k \mid (A;v) \in GX,\ \det A^k = \text{constant jet} \}$

$\mathfrak{J}^{\cdot k} = \{ (P;\phi)^k \mid \det P = 1 \}$,　とする。

<u>命題7.</u>　次が成立する。

(1) $D \supset CX_r$, $r \geqq 1$

(2) $C^k \cap D^k = C^k \cap D^k$

<u>命題8.</u>　(1) D^k は、$J^k(M, \mathrm{End}(TM) \times_M TM)$ のなかの algebraic set になり、N^k を D^kの non-singular point set とすると、これは $J^k(M, \mathrm{End}(TM) \times_M TM)$ の中の部分多様体 である。

(2)　$\{ CX_1$のk-jets$\} \subset N^k$

(3)　$\mathfrak{J}^{\cdot k}$は、D^k、及び、N^k に作用する。

多様体 N^k と、変換群 $\mathfrak{J}^{\cdot k}$ に対して、"versal unfolding は $(A;v)^k$ の orbit に transversal な family で特徴づけられる" というベクトル場の versal unfolding のときと同様の原理が成立すること、及び、補題6から、次の定理をえる。

<u>定理９.</u>　　（Ａ；ｖ）$^k \in C^k$ の N^k 内の unfolding $(A_\mu ; v_\mu)^k$ が（Ａ；ｖ）^{k} の $\mathcal{J}^{\cdot k}$-orbit に transversal ならば、それは（Ａ；ｖ）^{k} の k-versal unfolding である。

４.　　２次元の constrained system のいくつかの簡単な場合について、versal unfolding の計算結果を報告する。normal form に関しては、［４］を参照されたい。

	normal form	versal unfolding	dynamics	k
1)	$\begin{pmatrix} & 0 & & 1 \\ & & ; & \\ 0 & 1 & & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & & 1 \\ & & ; & \\ 0 & 1 & & 0 \end{pmatrix}$	rapid motion	∞
2)	$\begin{pmatrix} & 0 & & \pm x \\ & & ; & \\ 0 & 1 & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & & \alpha \pm (1+\beta)x+\gamma xy \\ & & ; & \\ 0 & 1 & & 1 \end{pmatrix}$	slow regular motion	2
3)	$\begin{pmatrix} & 0 & & \pm y+ax^2 \\ & & ; & \\ 0 & 1 & & 1 \pm x \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & & \alpha+\beta x \pm y+(a+\gamma)x^2+\delta xy \\ & & ; & \\ 0 & 1 & & 1 \pm (1+\zeta)x \end{pmatrix}$	jumping motion	2
4)	$\begin{pmatrix} & 0 & & \pm y+s_1x^2 \\ & & ; & \\ 0 & 1 & & s_2x^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & & \alpha+\beta x \pm y+s_1x^2+\gamma xy \\ & & ; & \\ 0 & 1 & & \delta+s_2x+\zeta x^2 \end{pmatrix}$	canard (duck)	2

但し、$s_1, s_2 = \pm 1$、ギリシア文字は、unfolding parameter を表す。また、kは normal form の次数を表している。これらを常微分方程式の形でかくと次のようになる。

1) $\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = \alpha \pm (1+\beta) x + \gamma xy \\ \dot{y} = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = \alpha + \beta x \pm y + (a+\gamma) x^2 + \delta xy \\ \dot{y} = 1 \pm (1+\zeta) x^2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = \alpha + \beta x \pm y + s_1 x^2 + \gamma xy \\ \dot{y} = \delta + s_2 x + \zeta x^2 \end{cases}$

これらの相図は、下に示されたようになる。

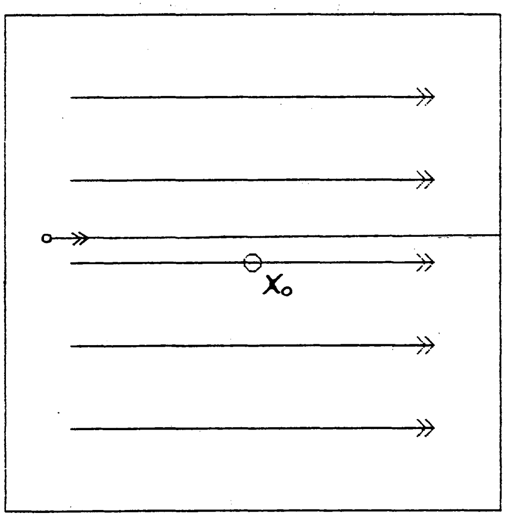

Fig. 1　rapid motion

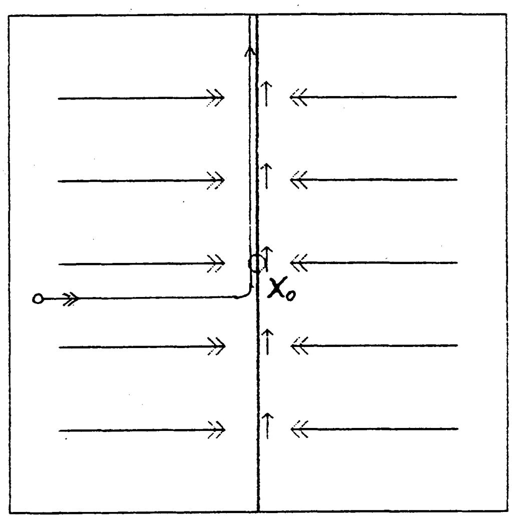

Fig. 2　slow regular motion

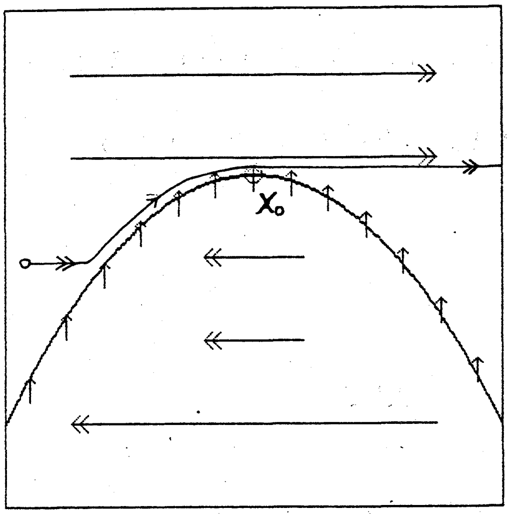

Fig. 3 jumping motion

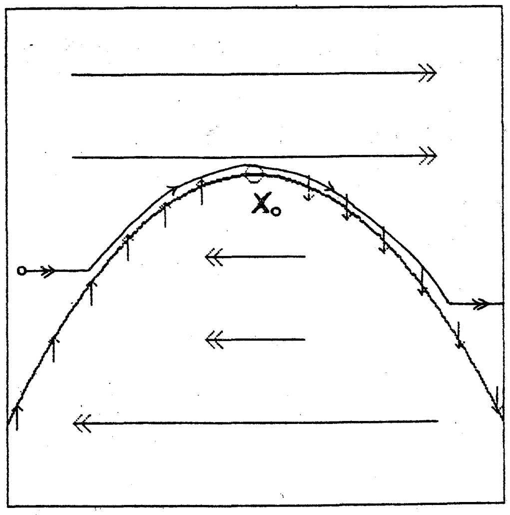

Fig. 4 canard

5. 参考文献

「１」岡宏枝　数理解析研究所講究録５７４　「力学系と非線形現象」1985年12月

「２」岡宏枝　数理解析研究所講究録６０２　「力学系と特異現象」1986年12月

「３」Oka, H. and Kokubu, H. An approach to constrained equations and strange attractors. Patterns and Waves--Qualitative Analysis of Nonlinear Differential Equations--(eds. T. Nishida, M. Mimura and H. Fujii), Kinokuniya and North-Holland, 1986, 607-630

「４」Oka, H. Constrained systems, characteristic surfaces and normal forms, Japan J. Appl. Math., Vol. 4, No. 3, 393-431